E8M Tutorium 3 Musterlösung Jonas Tiede www.j-tie.de

(7) $C: t \mapsto \vec{r}(t) = R\vec{e}_r(\varphi) + z(t)\vec{e}_z = R\vec{e}_r(\underbrace{2\pi t}_{=\varphi(t)}) + \frac{ht}{3}\vec{e}_z \quad \left[\vec{e}_r(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\right] \quad ; t \in [0,3]$

a) Länge einer Kurve C: $L_C = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|_2 dt$

Achtung: In kartesische Koordinaten (oder ohne) mit Formelsammlung umzurechnen ist witzlos und fördert die Übung solcher Aufgaben nicht!! :)

→ Berechnung in zylindrischen Koordinaten (wir wollen ja Spaß dran haben.)

Um die blau eingerahmte (schon bekannte) Formel anzuwenden, benötigen wir $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$.

Schritt-für-Schritt-Vorgehen: (Hinweis: $\varphi(t) = 2\pi t$, siehe Angabe / oben hervorgehoben)

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\vec{e}_r(\varphi) + z(t)\vec{e}_z\right) = R\frac{d\vec{e}_r(\varphi)}{dt} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{e}_z$$

fälschlicherweise 2-dimensional. Natürlich hat e_r noch eine dritte Komponente =0

$$\frac{d\vec{e}_r(\varphi)}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\cos(\varphi(t))\\ \sin(\varphi(t))\end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = \begin{pmatrix}-\sin(2\pi t)\\ \cos(2\pi t)\end{pmatrix} \cdot 2\pi = 2\pi \cdot \vec{e}_\varphi$$

↑ nachdifferenzieren! $= \vec{e}_\varphi$ siehe Sonder-Zusammenfassung zu krummlinigen Koordinatensystemen / Zylinderkoord.

hier muss d phi stehen

$$\frac{dz(t)}{dt}\vec{e}_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{ht}{3}\right)\vec{e}_z = \frac{h}{3}\vec{e}_z$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R \cdot 2\pi \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{h}{3}\vec{e}_z = \begin{pmatrix}0\\ 2\pi R\\ h/3\end{pmatrix}$$

[verifizieren: Schraubenlinie hat nirgends eine radiale Komponente, sondern ist an jedem Punkt senkrecht zu $\vec{e}_r$]

$$\rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|_2 = \sqrt{0^2 + (2\pi R)^2 + (h/3)^2}$$

weil KoSy orthonormal!

$$\rightarrow L_C = \int_0^3 \sqrt{(2\pi R)^2 + (h/3)^2}\, dt = \dots = 151{,}3\,m$$

b) Darstellung der Schraube als $\vec{r} = R_K \vec{e}_r(\vartheta, \varphi)$

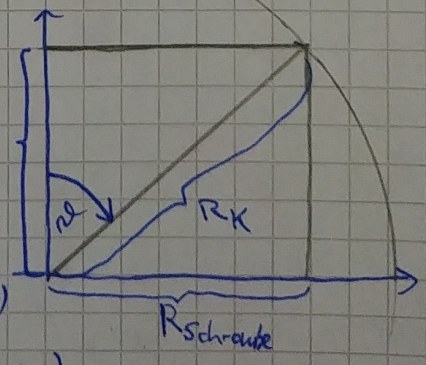
$$R_K = \sqrt{R_{Schraube}^2 + z^2} = \sqrt{R_{Schraube}^2 + \left(\frac{ht}{3}\right)^2}$$

$\varphi = 2\pi t$; siehe Angabe. Polarwinkel aus zylindrischen Koordinaten wird sozusagen übernommen.

ϑ: $\tan(\vartheta) = \frac{R}{z} = \frac{3R}{ht}$, ungünstig: $z = 0$ möglich. (wenn $t = 0$)

Ausnutzung der Eigenschaft des tan: $(\tan(x))^{-1} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \tan(\vartheta)^{-1} = \frac{z}{R} = \frac{ht}{3R}$$



$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \vartheta = \arctan\left(\frac{ht}{3R}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{ht}{3R}\right)$

Mit $\vec{e}_r(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$ und den berechneten Werten können wir alles in

$\vec{r} = R_K \cdot \vec{e}_r(\vartheta,\varphi)$ einsetzen.

$$\vec{r} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{ht}{3}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{ht}{3R}\right)\right)\cos(2\pi t) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{ht}{3R}\right)\right)\sin(2\pi t) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{ht}{3R}\right)\right) \end{pmatrix}$$

Wirklich unsdön! → Einen Zylinder beschreibt man besser nicht in Kugelkoordinaten. Daher: Grundsätzlich immer geeignetes Kosy wählen!

(8)

$$I = \int_0^{x_0}\int_0^{y_0}\int_0^{z_0} x^2 \sin y \, dz\, dy\, dx = z_0 \int_0^{x_0}\left[-\cos(y)\right]_0^{y_0} x^2 dx = -z_0 \int_0^{x_0}(\cos(y_0)-1)x^2 dx =$$

$$= -z_0(\cos(y_0)-1)\int_0^{x_0} x^2 dx = -z_0(\cos(y_0)-1)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_0} = -z_0(\cos(y_0)-1)\frac{1}{3}x_0^3$$

$$= z_0(1-\cos(y_0))\frac{1}{3}x_0^3$$

Für $y_0 = \pi$ und $z_0 = 2\pi$: $I = 2\pi(1-(-1))\cdot x_0^3 \cdot \frac{1}{3}$

$\frac{4}{3}\pi x_0^3$

Das ist das Volumen einer Vollkugel mit dem Radius x_0.

(9) Gradient: wird angewendet auf Skalarfelder. Liefert ein Vektorfeld. (Tutorium)

Allgemein: $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f \\ \frac{\partial}{\partial y} f \\ \frac{\partial}{\partial z} f \end{pmatrix}$ in kartesischen Koordinaten

a) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x \end{pmatrix}$ b) $\nabla g = \begin{pmatrix} \cos(x^2)\cdot 2x \\ ze^y \\ e^y \end{pmatrix}$ c) $\nabla h = \begin{pmatrix} e^x yz \\ e^x z \\ e^x y \end{pmatrix}$